Conciencia Digital

ISSN: **2600-5859**
Vol. 6 No. 3.1, pp. 21 – 34, agosto – septiembre 2023

www.concienciadigital.org

# Estudio sobre ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas de coeficientes constantes por el método de integrales sucesivas

*Study on non-homogeneous linear ordinary differential equations of constant coefficients by the method of successive integrals*

[1] Rómel Manolo Insuasti Castelo https://orcid.org/0000-0002-4170-1511
Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH), Riobamba, Ecuador.
rinsuasti@espoch.edu.ec

[2] Javier Roberto Mendoza Castillo https://orcid.org/0000-0003-3148-0193
Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH), Riobamba, Ecuador
jmendoza@espoch.edu.ec

[3] Patricia Mercedes Cepeda Silva https://orcid.org/0000-0001-5432-8165
Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH), Riobamba, Ecuador
patricia.cepeda@espoch.edu.ec

**Artículo de Investigación Científica y Tecnológica**
Enviado: 13/05/2023
Revisado: 21/06/2023
Aceptado: 01/07/2023
Publicado:17/08/2023
DOI: **https://doi.org/10.33262/concienciadigital.v6i3.1.2642**

**Cítese:** Insuasti Castelo, R. M., Mendoza Castillo, J. R., & Cepeda Silva, P. M. (2023). Estudio sobre ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas de coeficientes constantes por el método de integrales sucesivas. ConcienciaDigital, 6(3.1), 21-34. https://doi.org/10.33262/concienciadigital.v6i3.1.2642

**CONCIENCIA DIGITAL,** es una revista multidisciplinar, **trimestral,** que se publicará en soporte electrónico tiene como **misión** contribuir a la formación de profesionales competentes con visión humanística y crítica que sean capaces de exponer sus resultados investigativos y científicos en la misma medida que se promueva mediante su intervención cambios positivos en la sociedad. https://concienciadigital.org
La revista es editada por la Editorial Ciencia Digital (Editorial de prestigio registrada en la Cámara Ecuatoriana de Libro con No de Afiliación 663) www.celibro.org.ec

**Palabras claves:** Ecuaciones diferenciales lineales, no homogéneas, Teorema de Cauhy, integrales sucesivas

**Resumen**

**Introducción:** Al resolver las ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de coeficientes constantes, es necesario encontrar una solución que corresponde a la parte homogénea $y_g$ y una parte corresponde a la parte no homogénea o particular de la función $g(x)$, cuando esta tiene la forma $e^{ax}$, donde "a" es una de las raíces correspondiente los factores de la ecuación característica de la ecuación diferencial, se presenta una particularidad en la solución particular, esto es que dependiendo del orden en la que se encuentran los factores, al plantear la integral sucesiva aparentemente se encuentra dos soluciones de $y_p$, que al comprobarlas en la ecuación diferencial si cumplen, esto lleva a pensar que no cumple con el teorema de Cauchy, el cual manifiesta que la ecuación diferencial tiene una única solución, pero al aplicar las condiciones iniciales en la solución general $y = y_g + y_p$, esta si cumple con dicho teorema corroborándose que la ecuación diferencial ordinaria lineal de coeficientes constantes tiene solución única al resolverla por el método de integrales sucesivas. De esta manera el estudio entonces corrobora y comprueba que el teorema de Cauchy garantiza la existencia y unicidad de una solución que cumple con las condiciones iniciales de una ecuación diferencial ordinaria. **Objetivo:** Comprobar que la solución particular resuelta por integración sucesiva de una ecuación diferencial ordinaria lineal de coeficientes constantes conduce a una solución particular de la ecuación diferencial única. **Metodología:** En el presente estudio para la resolución de las ecuaciones deferenciales ordinarias lineales no homogéneas de coeficiente constantes se utiliza el método de integrales sucesivas, además de utilizar el criterio de comprobación de la solución de una ecuación diferencial, para determinar mediante el teorema de Cauchy, que la solución es única en una ecuación diferencial cuando se tiene condiciones iniciales específicas. **Resultados:** A partir de un caso específico cuando la parte no homogénea tiene la forma $e^{ax}$ donde a es una raíz de la ecuación característica, aparentemente se encuentra dos soluciones para la solución particular, se comprueba que la solución es única al obtener la solución particular de la ecuación diferencial, con una condición inicial dada. **Conclusión:** Se comprueba que la solución particular resuelta por integración sucesiva de una ecuación diferencial ordinaria lineal de coeficientes constantes conduce a una solución particular de la ecuación diferencial única. **Área de estudio general:** análisis matemático. **Área de estudio específica:** ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas de coeficientes constantes.

**Keywords:**
Linear differential equations, non-homogeneous, Cauhy's Theorem, successive integrals

**Abstract**

**Introduction:** When solving non-homogeneous linear differential equations with constant coefficients, it is necessary to find a solution that corresponds to the homogeneous part, denoted as$y_g$, and a part that corresponds to the non-homogeneous part, denoted as$y_p$. In the case where the non-homogeneous part has the form $e^{ax}$, where "a" is one of the roots corresponding to the characteristic equation factors of the differential equation, a peculiarity arises in the solution. Depending on the order in which the factors are found, when setting up the successive integral, it may appear that there are two solutions for $y_p$. However, upon verifying them in the differential equation, they both satisfy it. This may lead to the belief that it does not comply with the Cauchy's theorem, which states that the differential equation has a unique solution. However, when applying the initial conditions to the general solution: $y = y_g + y_p$, it does comply with the theorem, confirming that the non-homogeneous linear differential equation with constant coefficients has a unique solution when solved using the method of successive integrals. Thus, the study confirms and verifies that Cauchy's theorem guarantees the existence and uniqueness of a solution that satisfies the initial conditions of an ordinary differential equation. **Objective:** Objective: Check that the solution solved by successive integration of a linear ordinary differential equation with constant coefficients, leads to a particular solution of the unique differential equation. **Methodology:** In the present study, for the resolution of non-homogeneous linear ordinary deferential equations with constant coefficients, the method of successive integrals is used, in addition to using the criterion of verification of the solution of a differential equation, to determine by means of Cauchy's theorem, that the solution is unique in a differential equation when it has specific initial conditions. **Results:** Starting from a specific case when the non-homogeneous part has the form

$e^{ax}$ where a is a root of the characteristic equation, apparently two solutions are found for the solution, it is verified that the solution is unique by obtaining the solution of the differential equation, with a given initial condition. **Conclusion:** It is verified that the solution solved by successive integration of a linear ordinary differential equation of constant coefficients, leads to a particular solution of the unique differential equation. **General area of study:** mathematical analysis. **Specific area of study:** non-homogeneous linear Ordinary Differential Equations with constant coefficients.

## Introducción

Las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas de coeficientes constantes son un tipo de ecuaciones diferenciales en las que la función primitiva desconocida y sus derivadas aparecen linealmente y además hay un término no homogéneo en la ecuación (Simmons, 1991). La solución de estas ecuaciones es la suma de la solución homogénea y de la parte no homogénea (superposición de soluciones) (Ventura & Espinoza, 2004), que corresponde a la solución particular que depende de la forma de la parte no homogénea, esta solución se la puede resolver mediante algunos métodos disponibles como son: método de coeficientes indeterminados, método de variación de parámetros, método abreviado, método de fracciones parciales, método de integrales sucesivas. En este estudio se utiliza el método de integrales sucesivas, en donde se presenta la particularidad de encontrar aparentemente dos soluciones, cuando la parte no homogénea de la ecuación diferencial tiene la forma $e^{ax}$, donde el valor de "a" corresponde a una de la raíces de la ecuación característica de la ecuación diferencial, solo por el hecho de intercambiar los factores que corresponden a la ecuación característica de la ecuación diferencial en la integral sucesiva, lo que inicialmente parece generar una contradicción puesto que una ecuación diferencial tiene una solución.

Al hacer uso del criterio del teorema de Cauchy que garantiza la existencia y unicidad de una solución que cumple con las condiciones iniciales de una ecuación diferencial ordinaria, se realiza la comprobación de este aplicando una condición inicial, en las dos supuestas soluciones, verificando la existencia de la solución particular única, aun cuando la solución general de la ecuación diferencial aparentemente tiene dos formas, conformadas por las dos soluciones particulares. Al dar condiciones iniciales al problema se pueden calcular los coeficientes de la solución general de la ecuación diferencial, pudiéndose comprobar el teorema de Cauchy, y de esta manera validar la solución de la ecuación diferencial por el método de integrales sucesivas.

Conciencia Digital
ISSN: 2600-5859
Vol. 6 No. 3.1, pp. 21 – 34, agosto – septiembre 2023
www.concienciadigital.org

El objetivo de la investigación es comprobar que la solución particular resuelta por integración sucesiva de una ecuación diferencial ordinaria lineal de coeficientes constantes conduce a una solución particular de la ecuación diferencial única.

## Metodología

En el presente estudio, se utiliza el método de integrales sucesivas para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas con coeficientes constantes. El método consiste en encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea a partir de una serie de integrales. Luego, se suma esta solución particular a la solución homogénea asociada para obtener la solución general de la ecuación diferencial. Además de utilizar el método de integrales sucesivas, se emplea el criterio de comprobación de la solución de una ecuación diferencial. Este criterio consiste en sustituir la solución obtenida en la ecuación diferencial original y verificar si se cumple la igualdad, si la solución satisface la ecuación diferencial, se considera válida.

Para garantizar la unicidad de la solución en una ecuación diferencial, se requieren condiciones iniciales específicas. Estas condiciones iniciales, también conocidas como condiciones de contorno, son valores que se proporcionan en un punto determinado del dominio de la ecuación diferencial. A través del teorema de Cauchy, se establece que, bajo ciertas condiciones, la solución de una ecuación diferencial con condiciones iniciales específicas es única en un intervalo dado.

## Resultados

Las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas de coeficientes constantes son un tipo de ecuaciones diferenciales en donde la función desconocida y sus derivadas aparecen linealmente y además hay un término no nulo al lado derecho de la ecuación (Fyres, 1985).

La forma general de una ecuación lineal no homogénea con coeficientes constantes es:

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = g(x) \quad (1)$$

En donde: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ son constantes.

Para resolver esta EDO se debe aplicar operadores diferenciales a cada una de las derivadas, transformando de esta manera esta EDO a una ecuación algebraica, la cual se debe resolver para $y$, siendo esta la solución particular, que corresponde a la forma que tiene $g(x)$(Aguirregabiria, 2000).

Así la ecuación en términos del operador diferencial es como sigue:

$$a_0 D^n y + a_1 D^{n-1} y + a_2 D^{n-1} y + \cdots + a_{n-1} D y + a_n y = g(x) \quad (2)$$

Conciencia Digital

ISSN: 2600-5859
Vol. 6 No. 3.1, pp. 21 – 34, agosto – septiembre 2023

www.concienciadigital.org

La solución general de una ecuación diferencial lineal no homogénea se compone de dos partes: la solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada y una solución particular de la ecuación no homogénea (Fernández, 2005).

La ecuación diferencial homogénea asociada tiene la forma la forma:

$$a_0 D^n y + a_1 D^{n-1} y + a_2 D^{n-1} y + \cdots + a_{n-1} D y + a_n y = 0 \tag{3}$$

La solución de esta ecuación diferencial homogénea se obtiene a partir de las raíces de la ecuación característica (Molero et al., 2011) (Molero et al., 2011), que corresponde de la siguiente manera:

$$a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n = 0 \tag{4}$$

Al ser está una ecuación polinómica implica que existen n raíces:

$$(D - m_1)(D - m_2) \dots (D - m_n) = 0 \tag{5}$$

Las cuales entregaran una solución de la parte homogénea de la forma:

$$y_g = \sum_{i=1}^{n} Ci * e^{m_i x} \tag{6}$$

Esta solución es parte de la solución general de la EDO, y es solución homogénea de la EDO (Tex, 2017).

Para encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea, se pueden utilizar algunos métodos como el método de coeficientes indeterminados o el método de variación de parámetros, los métodos abreviados, y dentro de estos las integrales sucesivas y fracciones parciales. Todos estos métodos permiten encontrar una solución particular que satisface el término no homogéneo de la ecuación.(Boyce & DiPrima, 2009)

La ecuación que tenemos que resolver con operadores diferenciales y la función $g(x)$, de la parte no homogénea es:

$$y_p = \frac{g(x)}{(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n)} \tag{7}$$

Si remplazamos la ecuación (5) se tiene:

$$y_p = \frac{g(x)}{(D-m_1)(D-m_2)\dots(D-m_n)} \tag{8}$$

ISSN: 2600-5859
Vol. 6 No. 3.1, pp. 21 – 34, agosto – septiembre 2023
www.concienciadigital.org

La ecuación (8) representa ecuaciones diferenciales lineales de primer grado y primer orden las cuales se las puede resolver en forma sucesiva (Zill & Cullen, 2009), de lo cual se conoce el resultado que corresponde a:

$$y_p = e^{m_1 x} \int e^{(m_2 - m_1)x} \dots . \int e^{-m_n x}\, g(x)(dx)^n \tag{9}$$

Al parecer se obtiene los resultados que según el orden de los factores del denominador de la ecuación (8), al cambiar el orden de dichos factores se debería obtener el mismo resultado.

La unicidad de la solución de una ecuación diferencial está respaldada por el teorema de existencia y unicidad de soluciones, formulado por el matemático francés Augustin-Louis Cauchy, que establece las condiciones bajo las cuales una ecuación diferencial tiene una única solución en un intervalo dado siempre y cuando se cumplan ciertas condiciones de continuidad y diferenciabilidad (TeX, 2020).

Finalmente, la solución general de la ecuación diferencial no homogénea se obtiene sumando la solución general de la ecuación homogénea y la solución particular de la ecuación no homogénea.

$$y = y_g + y_p \tag{10}$$

Esta última ecuación al ser la solución general se presenta con las constantes de integración que resulta de resolver la ecuación homogénea, en donde el número de estas constantes depende del orden de la ecuación diferencial resuelta (Zill & Cullen, 2009). Para encontrar los valores de las constantes se necesita las denominadas condiciones de frontera o condiciones iniciales o condiciones de Cauchy. Resolviéndose convenientemente y encontrándose el resultado de la solución partículas de la ecuación diferencial (Ramos, 2008).

Resolvamos la ecuación diferencial ordinaria lineal no homogénea de coeficientes constantes:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = e^{2x} \tag{11}$$

Aplicando operadores diferenciales se tiene:

$$D^2y + Dy - 6y = e^{2x} \tag{12}$$

Resolviendo la parte homogénea se tiene:

$$D^2y + Dy - 6y = 0 \tag{13}$$

Las raíces de la ecuación característica de la ecuación diferencial son:

$$(D+3)(D-2)=0 \tag{14}$$

Por tanto la solución homogénea de la ecuación diferencial lineal no homogénea de coeficientes constantes es:

$$y_g = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} \tag{16}$$

La solución particular de la función $g(x)$ se obtiene de la siguiente manera:

$$y_p = \frac{e^{2x}}{(D+3)(D-2)} \tag{17}$$

En donde la solución está dada por las integrales sucesivas:

$$y_p = e^{-3x} \int e^{(2+3)x} \int e^{-2x}\, e^{2x} dxdx \tag{18}$$

Resolviendo las integrales más internas se tiene:

$$y_p = e^{-3x} \int e^{5x}\, xdx \tag{19}$$

Para finalmente tener el resultado:

$$y_p = \frac{1}{25} e^{-3x} e^{5x}\,(5x-1) \tag{20}$$

$$y_p = \frac{1}{25} e^{2x}(5x-1) \tag{21}$$

Si resolvemos la ecuación diferencial lineal no homogénea de coeficientes constantes con los factores de la ecuación característica invertidos se tiene que la solución homogénea es la misma pero la solución particular de $g(x)$ será de la siguiente manera:

$$y_p = \frac{e^{2x}}{(D-2)(D+3)} \tag{22}$$

En donde la solución está dada por las integrales sucesivas:

$$y_p = e^{2x} \int e^{(-3-2)x} \int e^{3x}\, e^{2x} dxdx \tag{23}$$

Resolviendo las integrales más internas se tiene:

$$y_p = \frac{1}{5} e^{2x} \int e^{-5x}\, e^{5x} dx \tag{24}$$

Para finalmente tener el resultado:

$$y_p = \frac{1}{5} x e^{2x} \tag{25}$$

Conciencia Digital
ISSN: 2600-5859
Vol. 6 No. 3.1, pp. 21 – 34, agosto – septiembre 2023
www.concienciadigital.org

Como se puede observar las soluciones son diferentes al cambiar la posición de los factores de la ecuación de la solución particular (21) y (25). Llama la atención puesto que la solución debe ser única, por lo que es necesario comprobar las respuestas, mediante el criterio de comprobación de una solución en una ecuación diferencial (Araujo, 2018). Esto es, habrá que derivar las veces que se indique en la ecuación diferencial y remplazar estos valores en esta, para obtener una identidad, de esta manera se comprueba que es solución de la EDO (Macías, 2008).

De la solución dada en la ecuación (21)

$$y_p = \frac{1}{25}e^{2x}(5x-1) \tag{26}$$

$$\frac{dy_p}{dx} = \frac{1}{25}e^{2x}(10x+3) \tag{27}$$

$$\frac{d^2y_p}{dx^2} = \frac{4}{25}e^{2x}(5x+4) \tag{28}$$

Remplazando en la ecuación (11) se tiene:

$$\frac{4}{25}e^{2x}(5x+4) + \frac{1}{25}e^{2x}(10x+3) - 6\frac{1}{25}e^{2x}(5x-1) = e^{2x} \tag{29}$$

$$e^{2x} = e^{2x} \tag{30}$$

De la solución dada en la ecuación (25)

$$y_p = \frac{1}{5}xe^{2x} \tag{31}$$

$$\frac{dy_p}{dx} = \frac{1}{5}e^{2x}(2x+1) \tag{32}$$

$$\frac{d^2y_p}{dx^2} = \frac{4}{5}e^{2x}(x+1) \tag{33}$$

Remplazando en la ecuación (11) se tiene:

$$\frac{4}{5}e^{2x}(x+1) + \frac{1}{5}e^{2x}(2x+1) - 6\frac{1}{5}xe^{2x} \;\; = e^{2x} \tag{34}$$

$$e^{2x} = e^{2x} \tag{35}$$

Como podemos observar las ecuaciones (21) y (25) son las soluciones particulares de la ecuación diferencial lineal no homogénea de coeficientes constantes por que se comprueba que es una identidad al remplazar dicha solución en la ecuación diferencial, a pesar de que son algebraicamente diferentes (Villena, 2009). Como sabemos la solución general de la ecuación diferencial lineal no homogénea de coeficientes constantes es como se indica en la ecuación (10):

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{25} e^{2x}(5x - 1) \tag{36}$$

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{5} x e^{2x} \tag{37}$$

Por esta razón es necesario comprobar si realmente generan una solución como sugiere el teorema de Cauchy. Para esto vamos a suponer que las condiciones iniciales son $y(0) = 0$ y $\frac{dy(0)}{dx} = 1$, con esto determinamos los valores de las constantes de la solución.

Resolviendo para la solución de la ecuación (36):

$$0 = C_1 e^0 + C_2 e^0 + \frac{1}{25} e^0 (0 - 1) \tag{38}$$

$$C_1 + C_2 = \frac{1}{25} \tag{39}$$

Remplazando en la derivada de (36)

$$\frac{dy}{dx} = -3C_1 e^{-3x} + 2C_2 e^{2x} + \frac{1}{25} e^{2x}(10x + 3) \tag{40}$$

$$\frac{dy(0)}{dx} = -3C_1 e^0 + 2C_2 e^0 + \frac{1}{25} e^0 (0 + 3) \tag{41}$$

$$-3C_1 + 2C_2 + \frac{3}{25} = 1 \tag{42}$$

Resolviendo las ecuaciones (39) y (42) se tiene:

$$C_1 = -\frac{4}{25} \tag{43}$$

$$C_2 = \frac{1}{5} \tag{44}$$

De esta manera la solución particular de la ecuación diferencial lineal no homogénea de coeficientes constantes es:

$$y = -\frac{4}{25} e^{-3x} + \frac{1}{5} e^{2x} + \frac{1}{25} e^{2x}(5x - 1) \tag{45}$$

O $$y = -\frac{4}{25} e^{-3x} + \frac{4}{25} e^{2x} + \frac{1}{5} x e^{2x} \tag{46}$$

Resolviendo para la solución de la ecuación (37):

$$0 = C_1e^0 + C_2e^0 + \frac{1}{25}e^0 0 \tag{47}$$

$$C_1 + C_2 = 0 \tag{48}$$

Remplazando en la derivada de (37)

$$\frac{dy}{dx} = -3C_1e^{-3x} + 2C_2e^{2x} + \frac{1}{5}e^{2x}(2x+1) \tag{49}$$

$$\frac{dy(0)}{dx} = -3C_1e^0 + 2C_2e^0 + \frac{1}{5}e^0(0+1) \tag{50}$$

$$-3C_1 + 2C_2 + \frac{1}{5} = 1 \tag{51}$$

Resolviendo las ecuaciones (47) y (50) se tiene:

$$C_1 = -\frac{4}{25} \tag{52}$$

$$C_2 = \frac{4}{25} \tag{53}$$

De esta manera la solución particular de la ecuación diferencial lineal no homogénea de coeficientes constantes es:

$$y = -\frac{4}{25}e^{-3x} + \frac{4}{25}e^{2x} + \frac{1}{5}xe^{2x} \tag{54}$$

De esta manera comprobamos que la solución particular es única, puesto que las ecuaciones (46) y (54) son iguales. Es decir que la solución es única, para las mismas condiciones iniciales.

## Conclusiones

- La solución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de coeficientes constantes, por integrales sucesivas, presentan una particularidad al encontrar la solución particular cuando la función que no le deja ser homogénea tiene la forma $e^{ax}$ , donde el valor de a es una de las raíces de la ecuación característica, puesto que dependiendo del orden de los factores de la parte homogénea se obtiene una respuesta diferente, según el ejercicio planteado se tiene:

  De la ecuación (17)

$$y_p = \frac{e^{2x}}{(D+3)(D-2)} \tag{55}$$

La solución es la ecuación (21)

$$y_p = \frac{1}{25} e^{2x}(5x - 1) \tag{56}$$

Al ser cambiado el orden de los factores, como en la ecuación (22)

$$y_p = \frac{e^{2x}}{(D-2)(D+3)} \tag{57}$$

La solución es la ecuación (25)

$$y_p = \frac{1}{5} x e^{2x} \tag{58}$$

Esto inicialmente da que pensar que no existe una solución única, pero al aplicar las condiciones iniciales en la solución general de la ecuación diferencial si se verifica que existe solución única, cumpliéndose el teorema Cauchy, que es la correspondiente a la ecuación (54), como sigue:

$$y = -\frac{4}{25} e^{-3x} + \frac{4}{25} e^{2x} + \frac{1}{5} x e^{2x} \tag{59}$$

Por lo tanto, toda ecuación diferencial tiene una solución única.

### *Referencias Bibliográficas*

Araujo, F. (2018). *Cálculo Integral*. Editorial Universal Abya-Yala. https://dspace.ups.edu.ec/bitstream/123456789/17058/1/Calculo%20integral.pdf

Boyce, W., & DiPrima, R. (2009). *Elementary-Diffrential-Equation-and-Boundary-Value-Problems*. Wiley (Ed). https://s2pnd-matematika.fkip.unpatti.ac.id/wp-content/uploads/2019/03/Elementary-Diffrential-Aquation-and-Boundary-Value-Problem-Boyce-DiPrima.pdf

Fernández, F. (2005). *Ecuaciones Diferenciales.* ULPGC (Ed). http://www2.ulpgc.es/hege/almacen/download/32/32540/ecuacionesdiferenciales.pdf

Fyres, F. (1985). *Teoría y Problemas de Ecuaciones Diferenciales* (Tercera Edición). McGraw-Hill. https://vdocuments.mx/1172-ecuaciones-diferenciales-schaum-richardbronson-3-edpdf-wwwleeydescargacompdf.html?page=6

Macías, D. (2008). *Ecuaciones-Diferenciales-Ordinarias-y-sus-Aplicaciones.pdf*. TECNM (Ed). https://www.researchgate.net/publication/325405727_Ecuaciones_Diferenciales_Ordinarias_y_sus_Aplicaciones

Molero, M., Salvador, A., Menarguez, T., & Garmendia, L. (2011). Ecuaciones Diferenciales Lineales de orden superior.pdf. En *Análisis Matemático para Ingeniería*. UPM (Ed). http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/fdistancia/pie/Analisis%20matematico/Temas/C10_Lineales_Orden_Superior.pdf

Ramos, E. (2008). *Análisis Matemático IV para Estudiantes de Ciencias e Ingeniería* (Segunda Edición). Eduardo Espinoza Ramos. https://ramojim.files.wordpress.com/2015/09/anc3a1lisis-matemc3a1tico-iv-e28093-eduardo-espinoza-ramos.pdf

Simmons, G. (1991). *Differential Equations With Applications and Historical Notes* (Segunda). McGraw-Hill. https://dokumen.tips/documents/george-f-simmons-differential-equations-with-applications-and-historical-notes.html

Tex. (2017). *Teoria continuo tema1.pdf*. http://matema.ujaen.es/jnavas/web_modelos_empresa/archivos/archivos%20pdf/teoria/teoria%20continuo/teoria%20continuo%20tema1.pdf

TeX. (2020). *Teor-Existencia-1.pdf*. http://blogs.mat.ucm.es/cruizb/wp-content/uploads/sites/48/2020/07/Teor-Existencia-1.pdf

Ventura, J., & Espinoza, B. (2004). *Ecuaciones Diferenciales Tecnicas de Solucion y Aplicaciones—Matemática* (Primera Edición). Universidad Autonoma Metropolitana. https://es.studenta.com/content/115164156/ecuaciones-diferenciales-tecnicas-de-solucion-y-aplicaciones

Villena, M. (2009). Integración Múltiple. En *Integración Múltiple*. ESPOL (Ed). https://www.dspace.espol.edu.ec/bitstream/123456789/7287/5/5-Integraci%C3%B3n%20M%C3%BAltiple.pdf

Zill, D. G., & Cullen, M. R. (2009). *Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera* (7th ed). Brooks/Cole, Cengage Learning. https://cutbertblog.files.wordpress.com/2017/10/ecuacionesdiferencialesconproblemasconvaloresenlafrontera7th-141218051407-conversion-gate01.pdf

## Conflicto de intereses

Los autores declaramos que no existe conflicto de intereses en relación con el artículo presentado.

ISSN: **2600-5859**
Vol. 6 No. 3.1, pp. 21 – 34, agosto – septiembre 2023

www.concienciadigital.org



Indexaciones