www.concienciadigital.org

ISSN: 2600-5859
Vol. 4, N°3.1, p. 348-357, agosto, 2020

Propuesta metodológica para la solución de aplicaciones geométricas de ecuaciones diferenciales ordinarias

Methodological proposal for the solution of geometric applications of ordinary differential equations

Rómel Manolo Insuasti Castelo. [1], Javier Roberto Mendoza Castillo. [2]

Recibido: 10-05-2019 / Revisado: 15-06-2019 /Aceptado: 04-07-2019/ Publicado: 25-07-2019

Abstract.

DOI: https://doi.org/10.33262/concienciadigital.v3i3.1.1404

Solving problems of geometric application of Ordinary Differential Equations presents certain difficulties when deciding how to treat them to find the differential equation that is present in a given problem. These problems are solved at higher levels of study, where the solution of these is not very clear, for this reason it is tried in this work, to determine a general path, as far as possible, that facilitates the resolution of the problem in progress. For which use is made of a retail analysis, identifying the parts present that affect the problem or data that may be explicit or implicit and a subsequent synthesis, which allows to relate the parts of the problem found in the analysis, fundamentally specifying in the differential equation that is describing the problem in all its parts. The results obtained from this methodology must be verified at the end, to be sure that the resolution process has been developed successfully.

Keywords: Methodology, geometric applications, differential equations

[1] Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Facultad de Mecánica, Riobamba, Ecuador, rinsuasti@espoch.edu.ec
[2] Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Facultad de Recursos Naturales, Riobamba, Ecuador, jmendoza@espoch.edu.ec

ISSN: 2600-5859
Vol. 4, N°3.1, p. 348-357, agosto, 2020

Resumen.

La resolución de problemas de aplicación geométrica de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), presenta ciertas dificultades al momento de decidir cómo tratarlas para encontrar la ecuación diferencial que está presente en un determinado problema. Este tipo de problemas son resueltos por lo general en los niveles de estudio superior, donde la solución de estos no resulta muy clara; por esta razón la presente investigación persigue, determinar una propuesta metodológica que facilite su resolución. Para este efecto en un primer momento se hace necesario realizar un análisis pormenorizado, identificando las partes presentes que inciden en el problema o datos que pueden ser explícitos o implícitos y una posterior síntesis, que permita relacionar las partes del problema encontradas en el análisis; llegando así a concretar fundamentalmente en la ecuación diferencial, que está describiendo en todas sus partes el problema. Los resultados que se obtienen permiten corroborar la eficacia de la metodología propuesta.

Palabras claves: Metodología, aplicaciones geométricas, ecuaciones diferenciales.

Introducción.

La solución de las aplicaciones geométricas de la Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) en problemas reales o físicos, revisten en ocasiones un entorno muy complicado, donde principalmente se encuentran ecuaciones diferenciales de primer grado, primer orden y la solución de estas no es tanto el problema, sino el encontrar dicha ecuación diferencial, para posteriormente dar solución estrictamente matemática. (Asmar, 2000)

Como se apuntó anteriormente estas aplicaciones se observan en cursos de nivel superior, donde el estudiante presenta dificultad en el análisis para encontrar la ecuación diferencial que predice el fenómeno físico en cuestión y su posterior solución. (López, 2005). De la revisión bibliográfica especializada se puede inferir que no existe ningún lineamiento para la solución de dichos problemas, a más del ingenio y buen criterio del estudiante. (Garret, 1989; Woods et al.1985; Chi y Glaser, 1986; Gil, et al., 1988; Perales, 1993; Herron, 1996).

En este orden de ideas se puede manifestar que los problemas que se pueden resolver a partir de las ecuaciones deferenciales ordinarias (EDO), son todas aquellos en donde se pueden establecer variaciones o intervalos entre las variables que están actuando en el problema físico (crecimiento o decrecimiento), de no existir variación no es susceptible a resolver con ecuaciones diferenciales.

ISSN: 2600-5859
Vol. 4, N°3.1, p. 348-357, agosto, 2020

De lo anterior surge la pregunta o problema científico ¿cómo resolver y cómo obtener los datos que orienten a la solución de los problemas de aplicación geométrica de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)? A continuación, se presentan las ideas fundamentales para obtener la ecuación diferencial que describe el fenómeno físico.

Metodologia.

Como primera fase, se debe analizar el contexto que rodea al problema geométrico en cuestión, es de decir se debe determinar las partes que están involucradas en el problema; estos son datos que se les puede considerar como explícitos, los que se muestran con valores o condiciones claras, y los implícitos, que se consideran como datos que están en el problema, pero que no se los define claramente, pero que están alrededor del problema físico y que son un aporte importante para resolver el problema. Los pasos que determinan esta fase se exponen a continuación:

Paso 1.- Establecer un sistema de referencia y un punto de análisis, esto es, habrá que seleccionar el tipo de coordenadas apropiado para dar solución al problema y donde se encuentra el punto referencial para el análisis (es decir el origen de las coordenadas).

Paso 2.- Graficar en el sistema de referencias seleccionado, una posición cualquiera del problema en estudio. Esto implica que hay que evitar posiciones o condiciones especiales que puede presentarse en el problema, la razón es que en ocasiones el resolver para dichas posiciones no se logra resolver el problema en forma general, sino más bien solo se justifica apropiadamente para estas posiciones especiales.

Paso 3.- Identificar claramente las variables presentes en el problema y como están relacionadas, es decir se debe definir la dependencia entre dichas variables, es decir determinar claramente cuál es la variable dependiente y cual la independiente.

Paso 4.- Establecer la geometría existente alrededor del problema.

Paso 5.- Determinar cuáles son las condiciones iniciales que están involucradas en el problema y cuáles son las posiciones o condiciones especiales que se encuentran en el problema pues esto ayudará tanto al análisis del problema, como también serán elementos de comprobación en el desarrollo de la solución del problema.

ISSN: 2600-5859
Vol. 4, N°3.1, p. 348-357, agosto, 2020

La segunda fase corresponde a la síntesis de datos. Una vez que se haya analizado y que se tenga expuesto las partes del problema, se debe sintetizar los datos presentes, procurando que estos se relacionen entre sí a partir de conceptos del análisis matemático o de otros conceptos de otros campos de conocimiento, como la geometría analítica, el álgebra lineal, la física u otros conceptos que estén presentes en el problema; tales como velocidad, aceleración, distancias, intensidad de corriente, calor, y otras magnitudes físicas.

Por ejemplo, si un dato es distancia y otro es el tiempo, estos valores pueden relacionarse a partir del concepto de velocidad. Todas estas magnitudes deben ser analizadas y sintetizadas de tal manera que presenten una interrelación coherente y lógica en el problema a resolver.

El lograr sintetizar es un paso importante, ya que esto permite incorporar los datos existentes y los valores que se intenta calcular, a partir de estos se logra determinar claramente la relación que existe entre las variables y de esta manera se mostrará al final el modelo matemático expresado en forma de ecuación diferencial, que luego se resolverá apropiadamente para encontrar su solución.

La tercera fase corresponde a la interpretación de la solución, esto con el objeto de verificar que lo obtenido representa el fenómeno físico resuelto y que puede ser aplicado en otras circunstancias parecidas como un modelo matemático cierto. (Sepúlveda, 2004).

Resultados.

Para observar la utilidad de la metodología empleada se desarrolla una aplicación geométrica cuya problemática se plantea de a siguiente manera:

Se desea encontrar la curva que pase por el punto A (0,2), en la que se forme un triángulo isósceles con la recta tangente, el eje y el radio vector al punto de tangencia, donde la base del triángulo isósceles es la recta tangente.

- El sistema seleccionado es el rectangular.

- Se grafica una posición cualquiera que ilustre el problema.

ISSN: 2600-5859
Vol. 4, N°3.1, p. 348-357, agosto, 2020

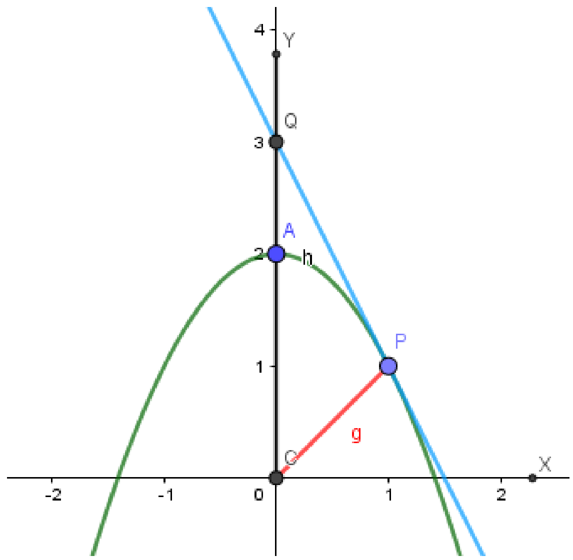

Figura 1. Gráfica de una posición general
Fuente: Elaboración propia.

- La variables en este caso son x e y, y se puede observar la existencia de variación de estas.

- Los datos que se tiene de manera explícita son los siguientes:

Punto por donde pasa la curva A (0,2).

Tangente a la curva.

Triángulo isósceles PCQ.

Radio vector CP

- Los datos que se tiene de forma implícita son:

De la tangente a la curva se tiene que $\frac{dy}{dx}$, es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto P de coordenadas (x, y) , lo que indica que es un punto cualquiera sobre la curva.

El punto Q es la intersección de la recta tangente con el eje y de coordenadas $(0, y_0)$.

Del triángulo isósceles se tiene que el segmento CP es igual al segmento CQ.

ISSN: 2600-5859
Vol. 4, N°3.1, p. 348-357, agosto, 2020

Cuando se habla de una curva entonces se trata de una función *y=f(x)*.

Síntesis

Se trata de relacionar los datos recogidos en forma explícita e implícitamente, para estos nos ayuda algunos conceptos matemáticos y de otros campos del conocimiento. (Vergnaud, 1990)

Del punto A (0,2), se deduce que es una condición inicial o de frontera. Es decir, me informa que cuando x=0 entonces y=2.

El segmento OP de acuerdo a la distancia entre los puntos en geometría analítica es $\sqrt{x^2+y^2}$, y e igual al segmento y_0 , por tanto se relacionan de la siguiente manera:

$$y_0 = \sqrt{x^2+y^2}$$

Donde esta expresión representa la síntesis de la existencia de un triángulo isósceles en el problema.

Veamos ahora como se encuentra relacionada la tangente en el problema, para lo cual podemos observar que la recta tangente corta con el eje y para formar el triángulo isósceles, por lo que es necesario encontrar la ecuación de dicha recta, que está dada por:

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{y - y_0}{x - 0}$$

Esta ecuación sintetiza a la recta tangente, que resulta ser la base del triángulo isósceles.

Si relacionamos las ecuaciones podemos encontrar la siguiente ecuación diferencial ordinaria de primer grado, primer orden, que sintetiza al problema:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x}$$

Esta ecuación es una ecuación homogénea cuya solución, luego de remplazar

$$y = tx \ y \ dy = tdx + xdt$$

ISSN: 2600-5859
Vol. 4, N°3.1, p. 348-357, agosto, 2020

Es $C = y + \sqrt{y^2 + x^2}$

Falta integrar la condición inicial del problema esto es si $x = 0$ entonces $y = 2$, remplazando los valores en la ecuación anterior se tiene que C=4, remplazando en la ecuación y realizando algunas transformaciones se llega a encontrar la solución:

$$y = 2 - \frac{x^2}{8}$$

Cuya gráfica es una parábola que se abre hacia abajo y pasa por el punto A (0,2), que sintetiza de forma global la formación de un triángulo isósceles, según las condiciones planteadas y cumple en cualquier punto sobre la curva.

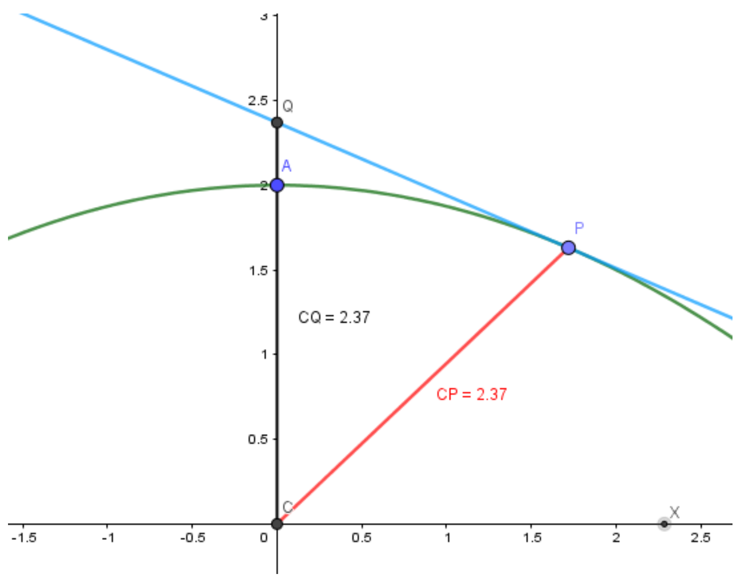

Figura 2. Posición real de la función y el triángulo isósceles
Fuente: Elaboración propia.

Como se puede observar se llega a la solución de la aplicación geométrica de la EDO con la utilización de la metodología expuesta, la cual se puede implementar en forma análoga a otros problemas de la misma índole.

ISSN: 2600-5859
Vol. 4, N°3.1, p. 348-357, agosto, 2020

Conclusiones.

- La aplicación de la metodología propuesta se constituye en una herramienta fácil y apropiada para resolver problemas de aplicaciones geométricas de las ecuaciones diferenciales ordinarias.
- La metodología se sustenta fundamentalmente en el análisis, encontrar las partes que están involucradas en el problema y en una síntesis de dichas partes para relacionarlas en forma apropiada de acuerdo al problema que se resuelve, para lo cual se necesita de conceptos de otros campos de conocimientos.
- Una vez sintetizadas las ideas y conceptos principales presentes en el problema, se logra encontrar la ecuación diferencial del problema, la cual, mediante los procedimientos establecidos de acuerdo al tipo de ecuación diferencial, se podrá dar solución sin mayor dificultad. Es importante que al final de dar solución se debe comprobar la solución.

Referencias bibliográficas.

Asmar, A., Aristizabal, H., Montes, R. (2000.). Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones. Medellín: Universidad Nacional, Sede Medellín.

Chi, M. y Glaser, R. (1986). Capacidad de resolución de problemas. En Sternerg, R.J., Las capacidades humanas. Un enfoque desde el procesamiento de la información (pp. 303-324). Barcelona: Labor.

Garret, R.M. (1989). Resolución de problemas, creatividad y originalidad. Revista Chilena de Educación Química, 14 (1-2), 21-28.

Gil, D., Dumas, A., Caillot, M., Martínez, J. y Ramírez, L. (1988). La resolución de problemas de lápiz y papel como actividad de investigación. Investigación en la Escuela, 6, 3-19.

López O., Maldonado, L.F., Ibáñez, J., Sanabria, L.B. y Quintero, V. (2005). La Complejidad en la Solución de Problemas. Niveles de complejidad en problemas de geometría dinámica. VIII Congreso Colombiano de Informática Educativa. Universidad Icesi, Cali, Colombia.

Perales, F.J. (1993). La resolución de problemas: Una revisión estructurada. Enseñanza de las Ciencias, 11 (2), 170-178.

ISSN: 2600-5859
Vol. 4, N°3.1, p. 348-357, agosto, 2020

Sepúlveda, A. y M. Santos (2004), "Developing Understanding in Mathematical Problem-Solving. A Study with High School Students", en D. E. McDougall y J. A. Ross (eds.), Proceedings of the twenty-sixth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Toronto, OISE/UT, pp. 499-506.

Vergnaud, G.; Booker George; Confrey Jere; Lerman Sthepen y Lonchhead Anna, Sfard Anna, Sierpinska Jack and Wheeler David. (1990). Epistemology and psychology of mathematics education. Págs. 14-30.

Woods, D.R., Crowe, C.M., Hoffman, T.W. y Wrig, J.D. (1985). Challenges to teaching problem-solving skills. Chem. 13 News, 155, 1-12.

PARA CITAR EL ARTÍCULO INDEXADO.

Insuasti Castelo, R. M., & Mendoza Castillo, J. R. (2020). Propuesta metodológica para la solución de aplicaciones geométricas de ecuaciones diferenciales ordinarias . *ConcienciaDigital*, *3*(3.1), 348-357. https://doi.org/10.33262/concienciadigital.v3i3.1.1404